

4. FUNKSIONET

Detyra për ushtrime –PJESA 6

Të caktohet zona e përkufizimit për funksionet:

1. $y = \ln(x-3) + \sqrt{\frac{5-x}{1+x}}$

2. $y = \ln \frac{x-1}{2x+7} + \sqrt{x^2-4} - \sin \frac{x}{2}$

3. $y = \log \frac{x^3-3x+2}{x+1}$

4. $y = (x-2)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

5. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}} + \sqrt{3+2x-x^2}$

6. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

7. $y = \sqrt{\log \frac{3x-x^2}{2}}$

8. $y = \arccos \frac{4}{3+2\sin x}$

9. $y = \log \sin 2x + \sqrt{\cos x}$

10. $y = \sqrt{\cos(\sin x)} + \log |x^2-1|$

11. $y = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)}$

12. $y = \log_2 \log_3 \log_4(x-1)$

13. $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}} + \log \frac{1}{x-4}$

14. $y = (2x+8-x^2)^{\frac{1}{2}} + \log_{0.3}(x-1)$

15. $y = \frac{3}{4-x^2} + \log(x^2-x)$

16. $y = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$

17. $y = \frac{x^2-4+\ln(-x)}{1+\sqrt{x^2-4}}$

18. $y = \ln \arcsin \frac{x+2}{5-x}$

19. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} + e^{\frac{1}{x}}$

20. $y = \arcsin(\sin x)$

21. $y = \arcsin(3+2^x)$

22. $y = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{|x|-x}}$

23. $y = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-|x|}}$

24. $y = \frac{1}{[x]}$

25. $y = \sqrt{[x]-x}$

26. $y = \log \sin \frac{3x-5}{2}$

27. $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

28. $y = \log\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$

29. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

30. $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$

31. $y = \log(\cos(\log x))$

32. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos 2^x$

Cilat nga funksionet vijuese janë simetrike (çift, tek) dhe cilat asimetrike

33. $y = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

34. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

35. $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

36. $y = x \sin^2 x - x^3$

37. $y = \cos(x+1)$

38. Funksioni $y = f(x)$ i definuar në intervalin $[-a, a]$ mund të paraqitet si shumë i një funksioni tek dhe një funksioni çift si vijon $y = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Tregoni.

39. A ekziston numri a për të cilin funksioni $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+x} - a \cdot \frac{5x+1}{x^2-x}$

a) është çift;

b) është tek.

Të caktohet perioda e funksioneve

40. $y = \sin^2 \frac{x}{2}$

41. $y = |\sin x| + |\cos x|$

42. Tregoni nëse $y = \sin x + \cos ax$ është periodik atëherë a është numër racional.

43. Le të jenë $f_1(x), f_2(x)$ funksione me të njëjtin domenë.

Të vërtetohet se:

a) Nëse funksionet $f_1(x), f_2(x)$ janë periodikë me perioda themelore T_1 dhe T_2 , përkatësisht dhe nëse $T_1 : T_2 = m : n$, ku $m, n \in \mathbb{N}$ dhe $(m, n) = 1$, atëherë shuma $f_1 + f_2$ dhe prodhimi $f_1 \cdot f_2$ janë funksione periodike.

b) Nëse për funksionet f_1 dhe f_2 ekziston numri $T > 0$ i tillë që $f_1(x+T) = f_2(x)$ dhe $f_2(x+T) = f_1(x)$ atëherë $f_1 + f_2$ dhe $f_1 \cdot f_2$ janë funksione periodike.

44. Tregoni se funksioni $f(x) = \sin x^2$ nuk është funksion periodik.

A janë periodike funksionet

45. $y = \sqrt{\operatorname{tg} \pi x}$

46. $y = \sin x + \sin \sqrt{2}x$

47. $f(x) = \cos x^2$

48. $y = x - [x]$

49. $y = x + \sin x$

50. $y = \cos \sqrt{x}$

51. Le të jetë f funksion periodik me periodë $p = 2$ i tillë që $f(x) = x^2 - 1$ në $[0, 2)$. Gjeni formulën analitike për funksionin f në $[2k, 2k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

52. Le të jetë f funksion periodikë me periodë themelore p i përkufizuar në \mathbb{R} . Tregoni se $f(ax + b)$, $a > 0$ është periodë me periodë themelore $\frac{p}{a}$.

53. Thuhet se funksioni f është periodikë me antiperiodë p nëse $f(x + p) = -f(x)$, ($x \in D_f$). Tregoni se nëse f është antiperiodë me antiperiodë p atëherë funksioni f është periodikë me periodë $2p$.

54. Tregoni se funksioni $F(x) = \frac{1 + F(x - a)}{1 - F(x - a)}$, ku a është konstante, është periodik.

Të caktohen intervalet e monotonisë së funksioneve

55. $y = x^2$, $n \in \mathbb{N}$

56. $y = x^3 + 2x$

57. $y = \frac{x}{1 + x^2}$

58. $y = a \sin x + b \cos x$

59. $y = [x]$

60. $y = 2^x$

61. Le të jenë f, g funksione monotone, të tilla që $D \subseteq \mathbb{R}$ ndërsa $F(x) = f[g(x)]$ kompozimi i tyre.

Të vërtetohet se:

a) Në qoftë se f, g janë njëkohësisht funksione rritëse ose zvogëluese atëherë funksioni F është rritës.

b) Në qoftë se njëri prej tyre është funksion rritës, e tjetri zvogëlues atëherë F është zvogëlues.

62. Le të jetë f funksion rritës në $(0, +\infty)$. Tregoni se funksioni $f(x^{2n})$, $n \in \mathbb{N}$ është zvogëlues në $(-\infty, 0)$ dhe rritës në $(0, \infty)$.

63. Le të jetë f funksioni rritës në $(-\infty, \infty)$. Çfarë mund të themi për $f(x^{2n+1})$, $n \in \mathbb{N}$?

A janë të kufizuara funksionet?

$$64. f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \quad 65. f(x) = \frac{x}{1+x} \quad 66. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

67. Është dhënë funksioni $f(x) = \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$, ($\operatorname{tg}x > 0$). Tregoni se f është i kufizuar nga poshtë dhe njehsoni $m = \min f(x)$ dhe x_m për të cilin $f(x_m) = m$.

Të caktohet $\max_{x \in I} f(x)$ dhe $\min_{x \in I} f(x)$ nëse:

$$68. f(x) = x^2 - 4x - 5, I = [0, 5] \quad 69. f(x) = \frac{x}{x+2}, I = [-10, -3]$$

$$70. f(x) = \frac{4-x^2}{4+x^2}, I = [-1, 3] \quad 71. f(x) = \frac{x^4+4}{x^2}, I = [1, 2]$$

Të caktohen funksionet inverse të funksioneve

$$72. y = \cos x - \sin x + 1 \quad 73. y = \ln \left(\arcsin \frac{x}{x+1} \right)$$

$$74. y = 2^{\frac{x}{x-1}} \quad 75. y = \frac{1}{2} \log_a \frac{1+x}{1-x}$$

$$76. y = \frac{1+x}{1-x} \quad 77. y = \sin x$$

$$78. y = \sqrt{\sin \ln x + \cos \ln x} - 1$$

$$79. \text{Le të jetë } f(x) = \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}, \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Tregoni se

$$a) f(\pi - 2x) = 2 - (f(x))^2; \quad b) f(x) = f(px) \operatorname{ctg} \frac{px}{2}.$$